

Preprint No. M 00/27

**Eine Spektralmethode zur
Verfolgung und Analyse
periodischer und quasiperiodischer
Lösungen**

Schilder, Frank; Vogt, Werner

November 2000

Impressum:

Hrsg.: Leiter des Instituts für Mathematik
Weimarer Straße 25
98693 Ilmenau
Tel.: +49 3677 69 3621
Fax: +49 3677 69 3270
<http://www.tu-ilmenau.de/ifm/>

ISSN xxxx-xxxx

ilmedia

Eine Spektralmethode zur Verfolgung und Analyse periodischer und quasiperiodischer Lösungen

F. Schilder und W. Vogt
Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik

22. November 2000

Zusammenfassung

Periodische bzw. quasiperiodische Lösungen periodisch erregter Differentialgleichungen können für eingeschränkte Problemklassen mit Hilfe der Mittelungsmethode von Krylov–Bogoljubov–Mitropolski, der Amplitudenmethode von Lagrange und Van der Pol oder der formalen Mittelungsmethode von Hayashi auf eine Gleichgewichtslage bzw. eine periodische Lösung einer autonomen Differentialgleichung reduziert werden. Eine wesentliche Eigenschaft dieser Methoden ist die Übertragung der Stabilitätseigenschaften der periodischen bzw. quasiperiodischen Lösung auf die transformierte Lösung. Problematisch dagegen sind die Einschränkung der Problemklasse, die oft heuristische Vorgehensweise und die teilweise fehlende mathematische Begründung.

Unter Verwendung eines Fourier–Ansatzes mit variablen Koeffizienten kann als Verallgemeinerung der oben genannten Methoden eine Spektralmethode hergeleitet werden. Insbesondere kann diese Methode mit einem Computeralgebrasystem algorithmiert und auf eine allgemeinere Klasse von Problemen, z.B. auch autonome Differentialgleichungen, angewendet werden.

Es zeigt sich, daß die Spektralmethode für die Verfolgung und Analyse periodischer und quasiperiodischer Lösungen von periodisch erregten Differentialgleichungen, die bei der Modellierung elektrotechnischer Schaltungen entstehen, ein allgemein anwendbares Verfahren darstellt.

A.M. SAMOILENKO [17]:

Quasi-periodic oscillations represent a rather complicated and “sensitive” object of study. [. . .] A quasi-periodic oscillation can be easily “destroyed” and turned into a periodic oscillation by a small change in the right-hand side of the system. This fact forces one to look for a “coarser” object of study in the theory of multi-frequency oscillation than a quasiperiodic solution. [. . .] Following A. Andronow and A. Witt we can assert that already Poincaré knew that such a set is a torus. [. . .]

1 Einleitung

Es werden periodisch erregte Differentialgleichungssysteme betrachtet:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2. \quad (1)$$

Die rechte Seite f sei für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 2π -periodisch in t und hinreichend oft stetig differenzierbar. In solchen Systemen können quasiperiodische Lösungen in zwei Grundfrequenzen auftreten. Die Analyse solcher quasiperiodischer Lösungen erfolgt in zwei Schritten:

1. die Approximation der quasiperiodischen Lösung bzw. des zugehörigen invarianten 2-Torus über dem Standardtorus \mathbb{T}^2 und
2. die Bestimmung der Stabilität der quasiperiodischen Lösung.

Für die Behandlung der ersten Teilaufgabe existieren verschiedene numerische Zugänge, die sich wie folgt einteilen lassen:

1. Direkte Approximation der Torusfunktion $u : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{R}^{n-1}$ als Lösung des quasilinearen partiellen Differentialgleichungssystems:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Psi(\theta, t, u, \lambda) \frac{\partial u}{\partial \theta} = R(\theta, t, u, \lambda), \quad (\theta, t) \in \mathbb{T}^2 \quad (2)$$

mittels Differenzenverfahren (vgl. [7], [8], [9], [1], [2], [23], [15]) oder Fouriermethoden auf \mathbb{T}^2 (vgl. [17], [14], [6]).

2. Bestimmung einer Invarianzkurve $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ der Poincaré-Abbildung P durch Approximation der Abbildung $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I = [0, 2\pi]$ so, daß

$$\gamma = \{x | x = u(\tau), \tau \in I, u(0) = u(2\pi)\}$$

invariant unter P ist, d.h. $P\gamma = \gamma$, mittels Diskretisierung und Interpolationstechniken (vgl. [13], [21], [22], [16], [14]).

Für die erste Vorgehensweise spricht die Unabhängigkeit des Verfahrens von den Trajektorien auf dem Torus und die Möglichkeit der Approximation instabiler 2-Tori. Nachteilig dagegen sind die große Systemdimension und die nur geringe Approximationsordnung sowie die Notwendigkeit der Kenntnis einer a-priori Koordinatentransformation in Radius–Winkel–Koordinaten. Letztere ist für Verfahren vom zweiten Typ nicht nötig, dafür sind diese aber stark von den Trajektorien abhängig und arbeiten nur für asymptotisch stabile quasiperiodische Lösungen zuverlässig. Beide Verfahren bieten (bisher) keine Möglichkeit der Stabilitätsanalyse.

Eine Methode, welche die Behandlung beider Teilaufgaben ermöglicht, ist die Reduktion einer quasiperiodischen Lösung auf einen Fixpunkt einer geeignet verallgemeinerten Poincaré–Abbildung (vgl. [12]). Sie liefert ein einfaches algebraisches Kriterium für die Stabilität einer quasiperiodischen Lösung und auch instabile quasiperiodische Lösungen können, zumindest prinzipiell, approximiert werden. Da diese Methode, insbesondere bei großer Rotationszahl, jedoch sehr stark vom Verhalten der Trajektorien abhängig ist, stellt die Bestimmung instabiler quasiperiodischer Lösungen in praxi ein großes Problem dar.

Neben diesen numerischen Verfahren existieren für spezielle Systeme (z.B. für spezielle Gleichungen 2.Ordnung, Gleichungen mit kleinem Parameter ε , Schwingungen mit langsam veränderlichen Amplituden etc.) asymptotische Approximationsverfahren:

1. die Amplitudenmethode von LAGRANGE und VAN DER POL,
2. die Mittelungsmethode von KRYLOV & BOGULJUBOV & MITROPOLSKI und
3. die formale Mittelungsmethode von HAYASHI.

Diese Näherungsverfahren liefern eine Approximation der quasiperiodischen Lösung und ermöglichen darüber hinaus eine Stabilitätsanalyse. Von großem Vorteil sind bei diesen Verfahren die „Dimensionsreduktion“ des untersuchten Objektes: eine periodische Lösung wird auf eine Ruhelage und eine quasiperiodische Lösung auf eine periodische Lösung reduziert. Weiterhin ist die Stabilität der auf diese Weise einander zugeordneten Objekte gleich, so daß die Stabilitätsanalyse quasiperiodischer Lösungen *mit Standardverfahren für periodische Lösungen* durchgeführt werden kann. Als problematisch erweist sich die sehr starke Einschränkung der untersuchbaren Problemklassen und die teilweise fehlende theoretische Fundierung (Konvergenz, Fehlerschätzung usw.). Trotz dieser Einschränkungen erfreuen sich insbesondere die Amplitudenmethode und die formale Mittelungsmethode in den Ingenieurwissenschaften großer Beliebtheit.

Um die Leistungsfähigkeit der formalen Mittelungsmethode zu demonstrieren, betrachten wir ein auf C. Hayashi zurückgehendes und von H. Kawakami und

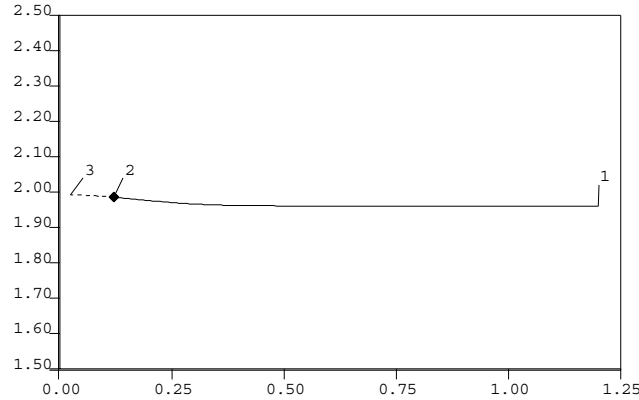


Abbildung 1: Bifurkationsdiagramm für $k_1 \in [0.25, 1.20]$, es tritt eine Torus-Bifurkation bei $k_1 \approx 0.1214$ (Label 2) auf.

T. Yoshinaga in [24] vorgestelltes Beispiel. Das System vom Duffing-Typ, im weiteren als Originalsystem bezeichnet, lautet:

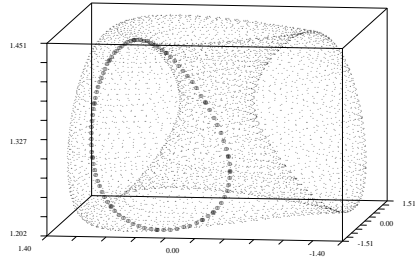
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_2 - \frac{1}{8}(x_1^2 + 3x_3^2)x_1 + B \cos t \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{8}k_2(3x_1^2 + x_3^2)x_3 + B_0.\end{aligned}\tag{3}$$

Die Periode der Poincaré-Abbildung ist $T = 2\pi$ und das System wird für die Parameter $B_0 = 0.03$, $B = 0.22$, $k_2 = 0.05$ und $k_1 \in [0.043, 0.09]$ analysiert.

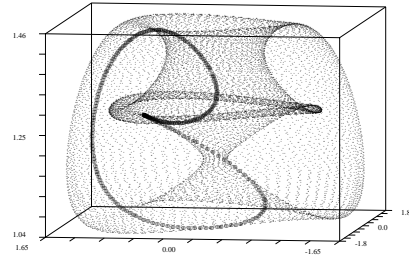
Wie man aus Abbildung 1 ablesen kann, findet für $k_1^* \approx 0.1214$ eine Torusbifurkation statt und eine asymptotisch stabile quasiperiodische Lösung entsteht für $k_1 < k_1^*$. Dieses Bifurkationsdiagramm wurde mit dem Programm **auto** (siehe [10]) erzeugt. In Abbildung 2 wird die entstehende quasiperiodische Lösung weiter verfolgt. Es zeigt sich, daß offenbar eine Kaskade von Periodenverdopplungen in einer Grundfrequenz auftritt und ein seltsamer Attraktor entsteht. Diese Parameterstudie wurde mit den Programmen **ivps** (siehe [19]) und **scilab** (siehe [20]) mittels Vorwärtsintegration der eingeschwungenen Lösung erzeugt.

Führt man eine Fourieranalyse der periodischen Lösung für $k_1 = 0.2$ durch, so stellt sich heraus, daß der wesentliche Anteil des Spektrums in einigen der ersten Glieder der Fourierentwicklung konzentriert ist (siehe Tabelle 1). Aus dieser Beobachtung wird bei Kawakami und Yoshinaga der folgende spezielle Ansatz für die Lösung abgeleitet:

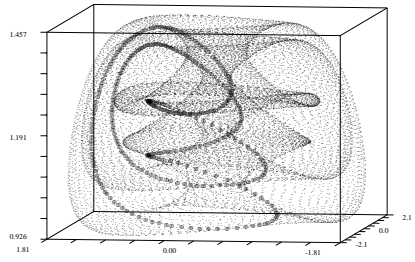
$$\begin{aligned}x_1(t) &= y_1(t) \cos(t) + y_2(t) \sin(t) \\ x_2(t) &= y_2(t) \cos(t) - y_1(t) \sin(t) \\ x_3(t) &= y_3(t),\end{aligned}\tag{4}$$



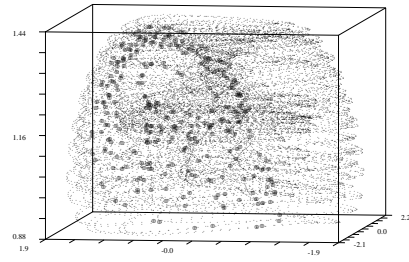
$$k_1 = 0.09$$



$$k_1 = 0.06$$



$$k_1 = 0.05$$



$$k_1 = 0.043$$

Abbildung 2: Parameterstudie des Systems von Kawakami, es tritt offenbar eine Sequenz von Periodenverdopplungen in einer Grundfrequenz auf. Der Poincaré-Schnitt wird durch die dicken Punkte dargestellt.

	x_1	x_2	x_3
c_0	2.005E-13	- 5.513E-13	<u>1.4491110</u>
c_1	- <u>0.5018176</u>	<u>0.7459752</u>	1.820E-13
c_2	<u>0.7459752</u>	<u>0.5018176</u>	- 3.397E-13
c_3	- 1.965E-12	- 2.397E-13	- 0.0050626
c_4	- 2.434E-13	1.671E-12	0.0022071
c_5	0.0028202	0.0001054	- 2.950E-14
c_6	0.0000351	- 0.0084605	- 6.328E-14
c_7	3.344E-13	- 3.319E-14	0.0000179
c_8	8.906E-13	- 1.214E-13	0.0000058
c_8	- 0.0000042	- 0.0000382	2.171E-14
c_{10}	- 0.0000076	0.0000209	- 5.293E-14

Tabelle 1: Die ersten Fourierkoeffizienten der periodischen Lösung des Systems von Kawakami für $k_1 = 0.2$ der Entwicklung $x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} \cos kt + c_{2k} \sin kt$.

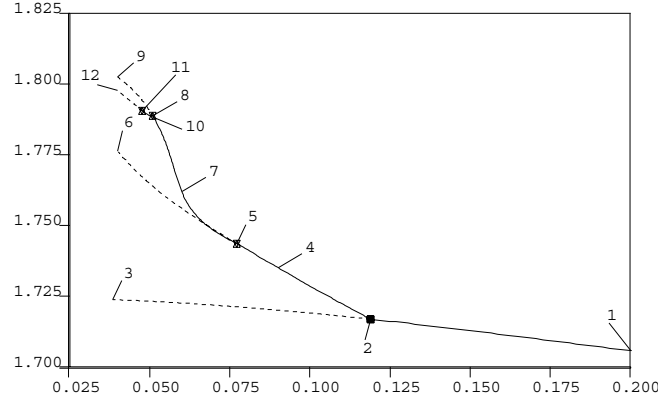


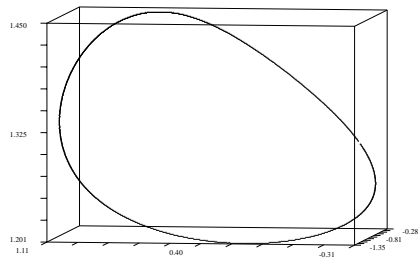
Abbildung 3: Bifurkationsdiagramm für $k_1 \in [0.04, 0.20]$, es tritt eine Hopf-Bifurkation (Label 2) und eine Kaskade von Periodenverdopplungen (Label 5, 8, 11) auf.

wobei die $y_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, als langsam variierende Funktionen der Zeit angenommen werden. Der formalen Mittelungsmethode von Hayashi folgend, führt einsetzen von (4) in (3), Koeffizientenvergleich der Terme, die $\sin(t)$ und $\cos(t)$ enthalten und nullsetzen der restlichen Terme auf das folgende, formal gemittelte System für die Amplitudenfunktionen y_i , im weiteren als Bildsystem bezeichnet:

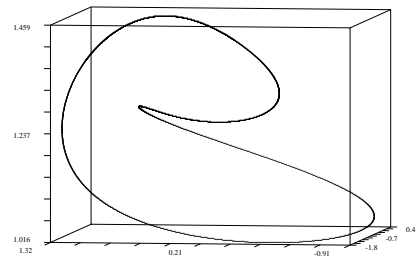
$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{1}{2}(-k_1 y_1 - A y_2) \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{2}(A y_1 - k_1 y_2 + B) \\ \dot{y}_3 &= B_0 - \frac{1}{16} k_2 (3r^2 + 2y_3^2) y_3 \end{aligned} \quad (5)$$

mit den Größen $A = 1 - \frac{3}{32}(r^2 + 4y_3^2)$ und $r^2 = y_1^2 + y_2^2$ (vgl. [24]). Abbildung 3 zeigt das Bifurkationsdiagramm der Gleichgewichtslage des Bildsystems (5), die der periodischen Lösung des Originalsystems (3) entspricht.

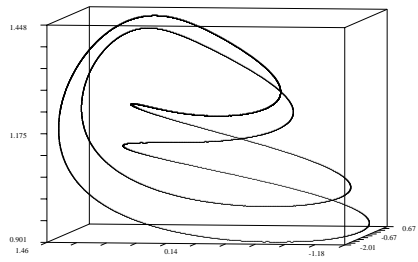
Bei $k_1^* \approx 0.1189$ findet eine Hopf-Bifurkation im Bildsystem statt und eine asymptotisch stabile periodische Lösung entsteht für $k_1 < k_1^*$, welche offenbar der quasiperiodischen Lösung des Originalsystems entspricht. Die periodische Lösung kann nun mit dem Programm **auto** weiter untersucht werden. Es zeigt sich, daß eine Kaskade von Periodenverdopplungen gemäß der folgenden Tabelle auftritt, die zu den Periodenverdopplungen der quasiperiodischen Lösung des Originalsystems analog verläuft.



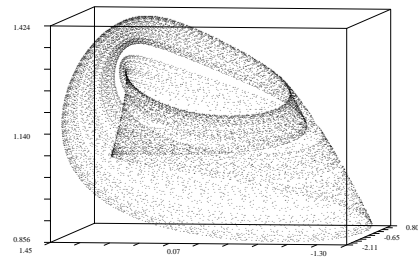
$$k1 = 0.09$$



$$k1 = 0.06$$



$$k1 = 0.05$$



$$k1 = 0.043$$

Abbildung 4: Parameterstudie des (autonomen) Bildsystems von Kawakami.

Label-Nr.	Spektralsystem	Originalsystem
1	stabile Ruhelage	stabile per. Lösung
2	Hopf-Bifurkation	Torus-Bifurkation
4	stabile per. Lösung	stabiler inv. Torus
5	Periodenverdopplung	Torus-Doppelung
7	stabile 2-per. Lösung	stabiler inv. Doppel-Torus
8	Periodenverdopplung	Torus-Doppelung
10	stabile 4-per. Lösung	stabiler inv. Vierfach-Torus
11	Periodenverdopplung	Torus-Doppelung
—	seltsamer Attraktor	seltsamer Attraktor

Die periodischen Lösungen des Bildsystems stellen Approximationen der Invarianzkurven der Poincaré-Abbildung des Originalsystems dar. In Abbildung 4 ist eine Parameterstudie dieser periodischen Lösungen dargestellt.

Als Verallgemeinerung der formalen Mittelungsmethode wird im folgenden eine Spektralmethode hergeleitet und mathematisch begründet. Mit Hilfe dieser gemischt symbolisch-numerischen Methode können quasiperiodische Lösungen in folgenden zwei Schritten approximiert und analysiert werden:

1. Erzeugung des Bildsystems (Spektralsystem) mit einem Algorithmus, der in einem Computeralgebrasystem (z.B. Maple oder mupad) implementiert werden kann. Dieser Schritt muß für jedes Differentialgleichungssystem nur einmal durchgeführt werden. Das Bildsystem liegt anschließend als Ausdruck im Computeralgebrasystem vor und kann als eine FORTRAN- oder C++-Funktion ausgegeben werden, welche für die weitere Behandlung mit Standardsoftware geeignet ist.
2. Numerische Approximation von Gleichgewichtslagen und periodischen Lösungen des Bildsystems mit numerischen Standardverfahren. Gleichgewichtslagen (periodische Lösungen) des Bildsystems entsprechen dabei periodischen (quasiperiodischen) Lösungen des Originalsystems. Ist das System parameterabhängig, kann eine Parameterfortsetzung mit Standardverfahren (Standardsoftware) durchgeführt werden.

Die Stabilitätsanalyse periodischer und quasiperiodischer Lösungen ist mit der Spektralmethode prinzipiell möglich und Gegenstand aktueller Untersuchungen.

2 Quasiperiodische Funktionen

Die Funktionenräume $\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ und $\mathcal{L}_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$

Sei $\mathbb{T}^2 = \{\theta \mid \theta = (\theta_1, \theta_2)^\top, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\}$, der zweidimensionale Standardtorus und $F : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{C}^n$ eine stetige Funktion der beiden Veränderlichen θ_1 und θ_2 , die 2π -periodisch bezüglich jeden Argumentes θ_1 und θ_2 ist. Eine solche Funktion nennen wir *Torusfunktion*. Die Menge aller Torusfunktionen bildet einen linearen Raum, den wir mit $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ bezeichnen. Zusammen mit der Norm

$$\|F\|_0 = \max_{\theta \in \mathbb{T}^2} \|F(\theta)\|$$

wobei

$$\|F(\theta)\|^2 = \sum_{i=1}^n |F_i(\theta)|^2$$

die Euklidische Norm im \mathbb{C}^n ist, wird $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ zu einem vollständigen normierten Raum.

Im $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ unterscheiden wir Unterräume $\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ von Torusfunktionen, die stetige Ableitungen bezüglich jeder Variablen θ_1 und θ_2 bis einschließlich der Ordnung r besitzen. Die Räume $\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ werden mittels der Norm

$$\|F\|_r = \max_{0 \leq \alpha \leq r} \|D^\alpha F\|_0$$

zu vollständigen normierten Räumen. Sei

$$P_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\|k\| \leq N} p_k e^{i(k, \theta)}$$

ein trigonometrisches Polynom in $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ mit komplexen Koeffizienten p_k , wobei $k = (k_1, k_2)$ ein Vektor mit ganzzahligen Elementen und $\|k\| = \max\{|k_1|, |k_2|\}$ ist, $(k, \theta) = k_1\theta_1 + k_2\theta_2$ gilt und N eine beliebige, nichtnegative ganze Zahl ist. Die Menge aller solcher Polynome bildet dann einen linearen Raum $\mathcal{P}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$, der eine dichte Teilmenge des $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_0$ ist (Satz von Weierstrass). Ein analoger Schluß gilt für die Räume $\mathcal{C}^r(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ in dem Sinne, daß jeder solche Raum der Abschluß des Raumes der r mal stetig differenzierbaren trigonometrischen Polynome $\mathcal{P}^r(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_r$ ist.

Für zwei trigonometrische Polynome P_N und Q_N aus $\mathcal{P}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ können wir ein Skalarprodukt definieren:

$$\langle P_N, Q_N \rangle_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle P_N, Q_N \rangle d\theta_1 d\theta_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\|k\| \leq N} \langle p_k, q_k \rangle, \quad (6)$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt im \mathbb{C}^n bedeutet. Skalarprodukt (6) induziert im $\mathcal{P}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ eine Norm:

$$\|P_N\|_0^2 = \langle P_N, P_N \rangle_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \|P_N\|^2 d\theta_1 d\theta_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\|k\| \leq N} \|p_k\|^2.$$

Bilden wir den Abschluß des $\mathcal{P}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ bezüglich dieser Norm, so erhalten wir einen Hilbertraum, den wir mit $\mathcal{L}_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ bezeichnen. $\mathcal{L}_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ ist der Raum der über \mathbb{T}^2 quadratisch summierbaren Torusfunktionen $F : \mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{C}^n$.

Die Funktionenräume $\mathcal{C}^r(\Omega, \mathbb{C}^n)$ und $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathbb{C}^n)$

Sei $\Omega = (\omega_1, \omega_2)^T$ ein Tupel positiver, rational unabhängiger (inkommensurabler) reeller Zahlen, d.h.:

$$(k, \Omega) = k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 = 0 \implies k = (0, 0)$$

für alle ganzzahligen Vektoren $k = (k_1, k_2)$ mit $\|k\| = \max\{|k_1|, |k_2|\}$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^n$ der reellen Variablen t mit:

$$f(t) = F(\Omega t) = F(\omega_1 t, \omega_2 t)$$

wobei $F \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ ist, heißt *quasiperiodische Funktion*, das Tupel $\Omega = (\omega_1, \omega_2)^T$ heißt *Frequenzbasis* und die Zahlen ω_1 und ω_2 heißen *Grundfrequenzen* der Funktion f . Die Menge aller quasiperiodischen Funktionen bildet einen linearen Raum, den wir mit $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}^n)$ bezeichnen. Zusammen mit der Norm

$$\|f\|_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$$

wird der $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}^n)$ zu einem vollständigen normierten Raum.

Einen wichtigen Zusammenhang zwischen quasiperiodischen Funktionen und Torusfunktionen liefert der folgende

Satz 1 (vgl. SAMOILENKO [17]) *Die Menge der Funktionswerte der quasiperiodischen Funktion $f(t) = F(\Omega t)$, $t \in \mathbb{R}$, ist dicht in der Menge der Funktionswerte der Torusfunktion $F(\theta)$, $\theta \in \mathbb{T}^2$.*

Als eine Folgerung aus diesem Satz ergibt sich die folgende Normgleichheit für $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}^n)$ und die zugehörige Torusfunktion $F \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$:

Lemma 1 *Für $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}^n)$ und die zugehörige Torusfunktion $F \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ gilt*

$$\|f\|_0 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\| = \max_{\theta \in \mathbb{T}^2} \|F(\theta)\| = \|F\|_0, \quad (7)$$

woraus

$$f(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff F(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^2 \quad (8)$$

folgt.

Im $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}^n)$ unterscheiden wir Unterräume $\mathcal{C}^r(\Omega, \mathbb{C}^n)$ quasiperiodischer Funktionen $f(t) = F(\Omega t)$ mit $F \in \mathcal{C}^r(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$. Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^r(\Omega, \mathbb{C}^n)$ besitzt stetige Ableitungen bezüglich t bis einschließlich der Ordnung r und jede dieser Ableitungen ist wieder eine quasiperiodische Funktion. Die Räume $\mathcal{C}^r(\Omega, \mathbb{C}^n)$ werden mittels der Norm

$$\|f\|_r = \|F\|_r$$

zu vollständigen normierten Räumen.

Die Normgleichheit (7) ermöglicht nachfolgend die Deduktion des Approximationstheorems. Sei

$$P_N(\Omega t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\|k\| \leq N} p_k e^{i(k, \Omega)t}$$

ein quasi-trigonometrisches Polynom mit komplexen Koeffizienten p_k , wobei $k = (k_1, k_2)$ ein Vektor mit ganzzahligen Elementen und $\|k\| = \max\{|k_1|, |k_2|\}$ ist, $(k, \Omega)t = k_1\omega_1 t + k_2\omega_2 t$ gilt und N eine beliebige, nichtnegative ganze Zahl ist. Dann gilt folgender

Satz 2 (Approximationstheorem) (vgl. SAMOILENKO [17]) *Sei $f \in \mathcal{C}^r(\Omega, \mathbb{C}^n)$ eine quasiperiodische Funktion mit der Frequenzbasis Ω . Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein quasi-trigonometrisches Polynom $P_N(\Omega t)$ so, daß*

$$\|f - P_N\|_r < \varepsilon$$

gilt, d.h. jede quasiperiodische Funktion kann gleichmäßig durch quasi-trigonometrische Polynome approximiert werden.

Die Menge aller quasi-trigonometrischen Polynome bildet einen linearen Raum $\mathcal{P}^r(\Omega, \mathbb{C}^n)$, der nach Satz 2 eine dichte Teilmenge des $\mathcal{C}^r(\Omega, \mathbb{C}^n)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_r$ ist. Für zwei quasi-trigonometrische Polynome P_N und Q_N aus $\mathcal{P}(\Omega, \mathbb{C}^n)$ können wir ein Skalarprodukt und eine dadurch induzierte Norm wie folgt definieren:

$$\langle P_N, Q_N \rangle_0 = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\|k\| \leq N} \langle p_k, q_k \rangle, \quad \|P_N\|_0^2 = \langle P_N, P_N \rangle_0,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt im \mathbb{C}^n bedeutet. Bilden wir den Abschluß des $\mathcal{P}(\Omega, \mathbb{C}^n)$ bezüglich dieser Norm, so erhalten wir einen Hilbertraum, den wir mit $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathbb{C}^n)$ bezeichnen. $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathbb{C}^n)$ ist der Raum der über jedem endlichen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ quadratisch summierbaren, quasiperiodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^n$.

3 Herleitung des Spektralsystems

Die folgende Herleitung geht stets von allgemeinen periodisch erregten Systemen der Ordnung $n \geq 2$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad , \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n} \quad (9)$$

in cartesischen Koordinaten aus. Ohne wesentliche Änderungen ist auch eine Übertragung des Zuganges auf quasiperiodisch erregte Systeme mit 2 Basisfrequenzen möglich, wogegen die Behandlung autonomer Systeme aufwendiger wäre.

Um die Betrachtungen auf den numerischen Zugang zu konzentrieren, soll die Existenz einer quasiperiodischen Lösung a-priori vorausgesetzt werden. Sätze dazu findet man z.B. bei SAMOILENKO [17] und BROER ET AL. [4],[5]. Folgende zwei Voraussetzungen seien erfüllt:

Vorraussetzung 1

Es gelte $f \in C^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit $r \geq 1$, r hinreichend groß. f sei periodisch in t mit Periode $T = 2\pi$

$$f(x, t + 2\pi) = f(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Vorraussetzung 2

System (9) besitze eine lokal eindeutige, einmal stetig differenzierbare quasiperiodische Lösung y mit den 2 Basisfrequenzen $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \omega > 0$, ω irrational.

Sei $\Omega = (\omega_1, \omega_2) = (1, \omega)$ die Frequenzbasis und $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ ein Indexvektor mit

$$(k, \Omega) = k_1\omega_1 + k_2\omega_2, \quad ||k|| = \max\{|k_1|, |k_2|\}.$$

Aufgrund des Satzes 2 läßt sich jede quasiperiodische Vektorfunktion $y \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}^n)$ durch ein *quasi-trigonometrisches Polynom* N-ten Grades

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{||k|| \leq N} c_k e^{i(k, \Omega)t} \quad (10)$$

gleichmäßig approximieren. Separiert man die Anteile in $\omega_1 t$ und $\omega_2 t$ mit dem Indexvektor $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$, so läßt sich die Darstellung

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\max(|k_1|, |k_2|) \leq N} c_{k_1 k_2} e^{i(k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2)t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k_1| \leq N} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k_2| \leq N} c_{k_1 k_2} e^{ik_2 \omega_2 t} \right\} e^{ik_1 \omega_1 t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k_1| \leq N} y_{k_1}(\omega_2 t) e^{ik_1 \omega_1 t}, \end{aligned}$$

mit den periodischen Koeffizientenfunktionen

$$y_{k_1}(\omega_2 t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k_2| \leq N} c_{k_1 k_2} e^{ik_2 \omega_2 t}$$

gewinnen. Hieraus erhält man mit $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \omega$ und $k_1 = k$ den „Separationsansatz“

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k| \leq N} y_k(\omega t) e^{ikt}. \quad (11)$$

Darin sind die $y_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ offenbar trigonometrische Polynome der Periode 2π für $|k| \leq N$.

Zur Vereinfachung der Darstellung empfiehlt sich eine geeignete Matrixnotation dieses Ansatzes. Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{2N+1}$ mit

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}, \quad \varphi(t) = (\varphi_{-N}(t), \dots, \varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t))^T$$

die Vektorfunktion der $2N + 1$ trigonometrischen Basispolynome bezüglich der Basisfrequenz $\omega_1 = 1$. Führt man die Matrixfunktion $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times (2N+1)}$, definiert durch

$$Y(\omega t) = (y_{-N}(\omega t), \dots, y_{-1}(\omega t), y_0(\omega t), y_1(\omega t), \dots, y_N(\omega t))$$

mit den Spaltenvektoren $y_k(\omega t)$ ein, so lautet Ansatz (11) nunmehr

$$y(t) = Y(\omega t) \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Die Matrixfunktion $Y = (y_{jk})$ besitzt folgende leicht überprüfbare Eigenschaften:

1. Wegen (10) werde für die Elemente $y_{jk} \in C^1(\mathbb{R})$ angenommen. Damit ist auch $y \in C^1(\mathbb{R})$.
2. Durch die Torusfunktion $\Psi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit

$$\Psi(\theta_1, \theta_2) = Y(\theta_2) \varphi(\theta_1)$$

wird die quasiperiodische Funktion $y(t) = \Psi(t, \omega t)$ generiert.

3. Sind alle Koeffizienten $y_{jk}(\omega t)$ konstant, so approximiert der Ansatz auch die 2π -periodischen Lösungen von (9).
4. Sind darüber hinaus auch $y_{jk}(\omega t) = 0$ für $k \neq 0$, so enthält der Ansatz sämtliche Ruhelagen (Gleichgewichtslagen, stationären Lösungen) von (9).

Differentiation von (12) ergibt

$$\dot{y}(t) = \omega Y'(\omega t)\varphi(t) + Y(\omega t)\dot{\varphi}(t) , \quad (13)$$

worin die Ableitungen $\dot{\varphi}(t)$ als konstante Linearkombination der $\varphi_k(t)$, $|k| \leq N$, darstellbar sind, d.h.

$$\dot{\varphi}(t) = \Phi\varphi(t) , \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \Phi \in \mathbb{C}^{(2N+1) \times (2N+1)} . \quad (14)$$

Speziell für $\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}$ lautet offenbar

$$\Phi = \text{diag}(-iN, -i(N-1), \dots, -2i, -i, 0, i, 2i, \dots, i(N-1), iN) .$$

Setzt man (13) und (14) in (9) ein, so liefert der Ansatz für das Residuum $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ die Darstellung

$$g(t) = \omega Y'(\omega t)\varphi(t) + Y(\omega t)\Phi\varphi(t) - f(Y(\omega t)\varphi(t), t) \quad (15)$$

Nach Voraussetzung 2 ist $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$. Jede Funktion $y(t) = Y(\omega t)\varphi(t)$ ist genau dann Lösung von (9), wenn $g(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ gilt.

Darüber hinaus ist g eine quasiperiodische Funktion mit den Basisfrequenzen $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \omega$. Die zugehörige Torusfunktion $G : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit $g(t) = G(\omega_1 t, \omega_2 t) = G(t, \omega t)$ lautet dann

$$G(\theta_1, \theta_2) = \omega Y'(\theta_2)\varphi(\theta_1) + Y(\theta_2)\Phi\varphi(\theta_1) - f(Y(\theta_2)\varphi(\theta_1), \theta_1) . \quad (16)$$

Wendet man nun Lemma 1 auf $g(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ an, so ist dies äquivalent der Gleichung

$$G(\theta_1, \theta_2) = 0 \quad \forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2$$

auf dem gesamten 2-Torus. Löst man also die Gleichung

$$G(\theta_1, \theta_2) = \omega Y'(\theta_2)\varphi(\theta_1) + Y(\theta_2)\Phi\varphi(\theta_1) - f(Y(\theta_2)\varphi(\theta_1), \theta_1) = 0 \quad (17)$$

und bestimmt $Y(\theta_2)$, so gewinnt man eine Lösung von (15).

Um eine Galerkin-Approximation von Lösungen der Gleichung (17) zu erhalten, werde im folgenden vereinfachend $t = \theta_1$ und $\theta = \theta_2$ gesetzt. Entwicklung von $f(Y(\theta)\varphi(t), t)$ aus (17) für beliebiges, aber festes θ in eine *Fourierreihe* nach $\{\varphi_k(t)\}$, $k \in \mathbb{Z}$ ergibt die Darstellung

$$f(Y(\theta)\varphi(t), t) = \Gamma(Y(\theta))\varphi(t) + R_N(\theta, t) ,$$

wobei $R_N(\theta, t)$ die Restglieder für $|k| > N$ enthält und die Matrix $\Gamma(Y(\theta)) = (\gamma_{jk}) \in \mathbb{C}^{n \times (2N+1)}$ abhängig von $Y(\theta)$ ist.

Skalarmultiplikation von (17) mit $\varphi_l(t)$, $|l| \leq N$ für beliebiges, aber festes θ im $\mathcal{L}_2([0, 2\pi], \mathbb{C}^n)$

$$\langle G(\cdot, \theta), \varphi_l \rangle_0 = \int_0^{2\pi} G(t, \theta) \overline{\varphi(t)} dt = 0, \quad |l| \leq N$$

liefert dann die Galerkin-Gleichungen

$$\langle \omega Y'(\theta) \varphi, \varphi_l \rangle_0 + \langle Y(\theta) \Phi \varphi, \varphi_l \rangle_0 - \langle \Gamma(Y(\theta)) \varphi, \varphi_l \rangle_0 - \langle R_N(\theta, t), \varphi_l \rangle_0 = 0,$$

woraus komponentenweise

$$\omega \cdot y'_{kl}(\theta) + (Y(\theta) \cdot \Phi)_{kl} - \gamma_{kl}(Y(\theta)) = 0, \quad k = 1 \dots n, |l| \leq N$$

folgt bzw. zusammengefaßt das *Spektralsystem*

$$\boxed{\omega \cdot Y'(\theta) = \Gamma(Y(\theta)) - Y(\theta) \cdot \Phi}. \quad (18)$$

Eigenschaften des Spektralsystems: (18) entsteht zu gewähltem Diskretisierungsparameter $N \in \mathbb{N}$ durch Projektion von $y(t) = Y(\omega t) \varphi(t)$ für beliebiges, aber festes $\theta = \omega t$ auf den Unterraum $S_N = \text{span}\{\varphi_k, |k| \leq N\}$ und Anwendung der Galerkin-Bedingung

$$\langle G(\cdot, \theta), \varphi_l \rangle_0 = 0, \quad |l| \leq N.$$

(18) ist zudem ein autonomes System mit $n(2N + 1)$ Gleichungen, für das 2π -periodische Lösungen $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times (2N+1)}$ gesucht sind. Dafür können neben Fourier-Methoden auch andere Diskretisierungsverfahren, wie

- finite Differenzenverfahren
- Schießverfahren und Mehrfach-Schießverfahren sowie
- Kollokationsverfahren

aus *Standardsoftware-Programmen* für periodische Lösungen benutzt werden. Falls die zweite Basisfrequenz ω unbekannt ist, so kann diese leicht durch eine Transformation von (18) eliminiert werden. Setzt man

$$\theta = \omega \tau \quad \text{und} \quad Y(\theta) = Y(\omega \tau) = X(\tau),$$

so lautet das Spektralsystem

$$\boxed{\dot{X}(\tau) = \Gamma(X(\tau)) - X(\tau) \cdot \Phi} \quad (19)$$

Gesucht sind nun periodische Lösungen $X(\tau)$ einer unbekannten Periode T , nach deren Ermittlung sich die zweite Basisfrequenz zu $\omega = 2\pi/T$ ergibt.

Für die Lösungen des Spektralsystem gilt folgender

Satz 3

Unter den Voraussetzungen (1), (2) gilt für $N \rightarrow \infty$:

$y(t) = Y(\omega t)\varphi(t)$ ist eine quasiperiodische Lösung des Originalsystems (9) mit den Basisfrequenzen $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \omega$ genau dann, wenn $Y(\theta)$ eine 2π -periodische Lösung des (unendlich-dimensionalen) Spektralsystems (18) ist.

Beweis: Wir beweisen zuerst die eine Richtung der Äquivalenzaussage. Sei $y(t) = Y(\omega t)\varphi(t)$ eine quasiperiodische Lösung des Originalsystems (9) mit Basisfrequenzen $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \omega$. Dann ist $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, $\dot{y}(t) = f(y(t), t) \forall t \in \mathbb{R}$, und $y(t)$ läßt sich als Fourier-Reihe

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k(\omega t) e^{ikt} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k(\omega t) \varphi_k(t) \quad (20)$$

darstellen. Darin sind die $y_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ als Fourier-Reihen der Periode 2π für $k \in \mathbb{Z}$ darstellbar. Differentiation von (20) liefert

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} [\omega y'_k(\omega t) \varphi_k(t) + y_k(\omega t) \dot{\varphi}_k(t)] \\ &= \omega \sum_{k \in \mathbb{Z}} y'_k(\omega t) \varphi_k(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik y_k(\omega t) \varphi_k(t). \end{aligned} \quad (21)$$

Einsetzen in das Originalsystem (9) ergibt die Darstellung

$$\begin{aligned} g(t) &:= \dot{y}(t) - f(y(t), t) \\ &= \omega \sum_{k \in \mathbb{Z}} y'_k(\omega t) \varphi_k(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik y_k(\omega t) \varphi_k(t) \end{aligned} \quad (22)$$

$$-f\left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} y_\nu(\omega t) \varphi_\nu(t), t\right) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (23)$$

Wegen $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ und $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ist offenbar $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$. Zudem ist g quasi-periodisch mit Basisfrequenzen $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \omega$, denn die φ_k und y_k sind 2π -periodisch, und f ist 2π -periodisch bezüglich t nach Voraussetzung (2). Damit besitzt $g(t)$ die zugehörige Torusfunktion $G \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$ vermittelt

$$g(t) = G(\omega_1 t, \omega_2 t) = G(t, \omega t), \quad (24)$$

die die Form

$$\begin{aligned} G(\theta_1, \theta_2) &= \omega \sum_{k \in \mathbb{Z}} y'_k(\theta_2) \varphi_k(\theta_1) \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik y_k(\theta_2) \varphi_k(\theta_1) \\ &\quad - f\left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} y_\nu(\theta_2) \varphi_\nu(\theta_1), \theta_1\right) \end{aligned} \quad (25)$$

besitzt. Nach Lemma 1 gilt wegen $G \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^n)$

$$g(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \implies \quad G(\theta_1, \theta_2) = 0 \quad \forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2. \quad (26)$$

Zur Vereinfachung der Darstellung fassen wir die Vektoren $y_k(\theta_2)$ für $k \in \mathbb{Z}$ zur Matrixfunktion

$$Y(\theta_2) = (\dots, y_{-N}(\theta_2), \dots, y_{-1}(\theta_2), y_0(\theta_2), y_1(\theta_2), \dots, y_N(\theta_2), \dots)$$

zusammen, und ersetzen in $G(\theta_1, \theta_2)$ die Funktion f durch ihre Fourier-Reihe bezüglich θ_1 , indem wir für festes θ_2 die rechte DGL-Seite als Funktion von θ_1 in ihre Fourier-Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned} \gamma(\theta_1) &:= f\left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} y_\nu(\theta_2) \varphi_\nu(\theta_1), \theta_1\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k(Y(\theta_2)) \varphi_k(\theta_1) \end{aligned} \quad (27)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} \gamma_k(Y(\theta_2)) &= \int_0^{2\pi} \gamma(\theta_1) \overline{\varphi_k(\theta_1)} d\theta_1 \\ &= \int_0^{2\pi} f\left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} y_\nu(\theta_2) \varphi_\nu(\theta_1), \theta_1\right) \overline{\varphi_k(\theta_1)} d\theta_1. \end{aligned} \quad (28)$$

Offenbar hängt γ_k von den Funktionen $y_\nu(\theta_2)$, $\nu \in \mathbb{Z}$, ab. Einsetzen von (27) in die Gleichung $G(\theta_1, \theta_2) = 0$ ergibt demzufolge

$$\begin{aligned} \omega \sum_{k \in \mathbb{Z}} y'_k(\theta_2) \varphi_k(\theta_1) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik y_k(\theta_2) \varphi_k(\theta_1) - \\ - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k(Y(\theta_2)) \varphi_k(\theta_1) = 0 \quad \forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Skalarmultiplikation dieser Gleichung mit $\varphi_l(\theta_1)$ und Integration über $[0, 2\pi]$ ergibt wegen der Orthogonalität der φ_k das System

$$\omega y'_k(\theta_2) + ik y_k(\theta_2) - \gamma_k(Y(\theta_2)) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (30)$$

Das aber ist genau (18) für $N \rightarrow \infty$, d.h. die $y_k(\theta_2)$ genügen dem Spektralsystem und sind zudem 2π -periodisch.

Wir zeigen nun die umgekehrte Richtung: Die Funktionen $\{y_k(\theta_2)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, mögen dem Spektralsystem (18) für $N \rightarrow \infty$ genügen; d.h. es gilt

$$\omega y'_k(\theta_2) + ik y_k(\theta_2) = \gamma_k(Y(\theta_2)), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (31)$$

Multiplikation mit der Basisfunktion $\varphi_k(\theta_1)$ und anschließende Summation aller Gleichungen über $k \in \mathbb{Z}$ ergibt die Darstellung für die Funktion

$$\begin{aligned} G(\theta_1, \theta_2) &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}} [\omega y'_k(\theta_2) \varphi_k(\theta_1) + ik y_k(\theta_2) \varphi_k(\theta_1)] \\ &\quad - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k(Y(\theta_2)) \varphi_k(\theta_1) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

für alle $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2$. Dabei ist γ_k durch das Integral (28) definiert, das zu den gegebenen Funktionen $y_k(\theta_2)$ und $\varphi_k(\theta_1)$ gebildet werden kann. Folglich stellt der letzte Term in (32) die Fourier-Reihe der Funktion

$$\gamma(\theta_1) = f \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} y_\nu(\theta_2) \varphi_\nu(\theta_1), \theta_1 \right) \quad (33)$$

dar und kann durch diese Funktion ersetzt werden. Damit hat $G(\theta_1, \theta_2)$ die Form

$$\begin{aligned} G(\theta_1, \theta_2) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} [\omega y'_k(\theta_2) \varphi_k(\theta_1) + ik y_k(\theta_2) \varphi_k(\theta_1)] \\ &\quad - f \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} y_\nu(\theta_2) \varphi_\nu(\theta_1), \theta_1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

für alle $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{T}^2$. Nach Lemma 1 ist dann

$$g(t) = G(\omega_1 t, \omega_2 t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

also

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} [\omega y'_k(\omega t) \varphi_k(t) + ik y_k(\omega t) \varphi_k(t)] \\ &\quad - f \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} y_\nu(\omega t) \varphi_\nu(t), t \right) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zusammenfassung der Summe ergibt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k(\omega t) \varphi_k(t) \right\} = f \left(\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} y_\nu(\omega t) \varphi_\nu(t), t \right). \quad (35)$$

Damit genügt die Funktion

$$y(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k(\omega t) \varphi_k(t) \quad (36)$$

wegen

$$\dot{y}(t) = f(y(t), t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

dem Originalsystem. Zudem ist $y(t)$ quasi-periodisch mit den Basisfrequenzen $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \omega$. \square

Folgerung 1

Unter den Voraussetzungen (1), (2) gilt für $N \rightarrow \infty$:

$A = (a_{kl})$, $k = 1 \dots n$, $l \in \mathbb{Z}$, ist eine Ruhelage (Gleichgewichtslage) des Spektralsystems (18), d.h.

$$A \cdot \Phi = \Gamma(A) \quad (37)$$

genau dann, wenn $y(t) = A\varphi(t)$ eine periodische Lösung des Originalsystems (9) ist.

Beweis: Jede periodische Lösung $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ des Originalsystems (9) läßt sich als Fourier-Reihe

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi_k(t) \quad (38)$$

darstellen. Zusammenfassung der a_k zur Matrix A und der $\varphi_k(t)$ zu $\varphi(t)$ ergibt die Darstellung $y(t) = A\varphi(t)$. Andererseits genügt jede Ruhelage A des Spektralsystems (18) der Gleichung (37). Der weitere Äquivalenznachweis ergibt sich als Spezialfall des obigen Beweises, indem die Koeffizientenfunktionen zu $y_k(\omega t) = a_k$ gesetzt werden. \square

Diese Folgerung stellt ein bekanntes Resultat dar (vgl. [11]), das durch Satz 3 auf den Fall quasi-periodischer Lösungen des Originalsystems verallgemeinert wurde. Die Voraussetzung 2 über die Inkommensurabilität der Basisfrequenzen ist dabei unabdingbar (Satz 1 und damit Lemma 1 gelten nur für derartige Fälle), so daß der Fall resonanter Tori gesondert untersucht werden muß.

4 Anwendung zur Analyse quasiperiodischer Lösungen

Wir betrachten hier wieder das System (3) von H. Kawakami und T. Yoshinaga. Das System vom Duffing-Typ lautet:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_2 - \frac{1}{8}(x_1^2 + 3x_3^2)x_1 + B \cos t \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{8}k_2(3x_1^2 + x_3^2)x_3 + B_0.\end{aligned}\tag{39}$$

Die Periode der Poincaré-Abbildung ist $T = 2\pi$ und wir untersuchen das qualitative Verhalten für die Parameterwerte $B_0 = 0.03$, $B = 0.22$, $k_2 = 0.05$ und für $k_1 \in [0.043, 0.09]$. Wir verwenden einen *reellen* Separationsansatz erster Ordnung für das Spektralsystem:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\omega t) & y_2(\omega t) & y_3(\omega t) \\ y_4(\omega t) & y_5(\omega t) & y_6(\omega t) \\ y_7(\omega t) & y_8(\omega t) & y_9(\omega t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}\tag{40}$$

$$\text{mit } Y(\omega t) = \begin{pmatrix} y_1(\omega t) & y_2(\omega t) & y_3(\omega t) \\ y_4(\omega t) & y_5(\omega t) & y_6(\omega t) \\ y_7(\omega t) & y_8(\omega t) & y_9(\omega t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Der reelle Ansatz wird gewählt, da das Programmpaket `auto` nur reelle Systeme analysieren kann. Auch für die hier gewählten Basisfunktionen kann eine Darstellung für $\dot{\varphi}(t)$ mittels der $\varphi(t)$ gefunden werden:

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

wobei offenbar

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Setzt man Ansatz (40) in (39) ein, so erhält man nach einigen Umformungen und Anwendung der Galerkin-Bedingung (z.B. mit Hilfe von Maple) folgendes

Spektralsystem, wobei der Punkt jetzt die Ableitung nach $\tau = \omega t$ bedeutet:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_4 \\
\dot{y}_2 &= y_5 + y_3 \\
\dot{y}_3 &= y_6 - y_2 \\
\dot{y}_4 &= -0.1875 y_1 y_8^2 - k_1 y_4 - 0.1875 y_1 y_9^2 - 0.1875 y_1 y_2^2 - 0.375 y_1 y_7^2 \\
&\quad - 0.375 y_2 y_7 y_8 - 0.375 y_3 y_7 y_9 - 0.1875 y_1 y_3^2 - 0.125 y_1^3 \\
\dot{y}_5 &= -0.375 y_2 y_1^2 - 0.375 y_2 y_7^2 - 0.75 y_1 y_7 y_8 - 0.28125 y_2 y_8^2 + y_6 \\
&\quad - 0.09375 y_2 y_3^2 - 0.09375 y_2 y_9^2 - k_1 y_5 - 0.09375 y_2^3 \\
&\quad - 0.1875 y_3 y_9 y_8 \\
\dot{y}_6 &= -0.375 y_3 y_7^2 - 0.375 y_3 y_1^2 - 0.28125 y_3 y_9^2 - 0.09375 y_3 y_8^2 \\
&\quad - 0.1875 y_2 y_9 y_8 + B - y_5 - 0.09375 y_3^3 - k_1 y_6 - 0.75 y_1 y_7 y_9 \\
&\quad - 0.09375 y_3 y_2^2 \\
\dot{y}_7 &= -0.375 k_2 y_9 y_1 y_3 - 0.1875 k_2 y_7 y_2^2 - 0.1875 k_2 y_9^2 y_7 \\
&\quad - 0.1875 k_2 y_7 y_3^2 - 0.375 k_2 y_7 y_1^2 - 0.125 k_2 y_7^3 + B0 \\
&\quad - 0.1875 k_2 y_8^2 y_7 - 0.375 k_2 y_8 y_1 y_2 \\
\dot{y}_8 &= -0.375 k_2 y_8 y_1^2 - 0.09375 k_2 y_8^3 - 0.75 k_2 y_7 y_1 y_2 + y_9 \\
&\quad - 0.1875 k_2 y_9 y_3 y_2 - 0.09375 k_2 y_8 y_9^2 - 0.09375 k_2 y_8 y_3^2 \\
&\quad - 0.375 k_2 y_8 y_7^2 - 0.28125 k_2 y_8 y_2^2 \\
\dot{y}_9 &= -0.75 k_2 y_7 y_1 y_3 - 0.09375 k_2 y_9^3 - 0.09375 k_2 y_8^2 y_9 \\
&\quad - 0.09375 k_2 y_9 y_2^2 - 0.375 k_2 y_9 y_7^2 - 0.1875 k_2 y_8 y_3 y_2 - y_8 \\
&\quad - 0.375 k_2 y_9 y_1^2 - 0.28125 k_2 y_9 y_3^2.
\end{aligned}$$

Für dieses System sind nun Ruhelagen und periodische Lösungen gesucht, wobei erstere periodischen und letztere quasiperiodischen Lösungen des Originalsystems (39) entsprechen.

Die numerische Analyse des Spektralsystems wurde mit dem Programmpaket **auto** durchgeführt, die Ergebnisse sind in den Abbildungen 5 und 6 grafisch dargestellt. Auch hier gelingt offenbar eine Identifikation periodischer Lösungen des Spektralsystems mit quasiperiodischen Lösungen des Originalsystems gemäß Tabelle 2. Wie man der Tabelle (und Abbildung 5) entnehmen kann, stimmen die Stabilitäten der einander zugeordneten Objekte nur bedingt überein. Eine zuverlässige Stabilitätsanalyse periodischer und quasiperiodischer Lösungen ist mittels der hier vorgestellten Spektralmethode noch nicht möglich.

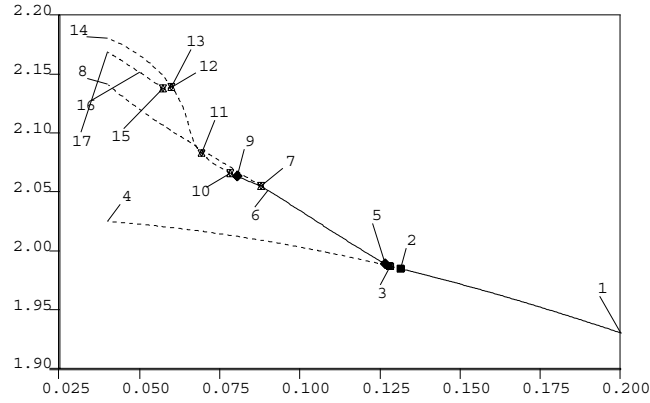
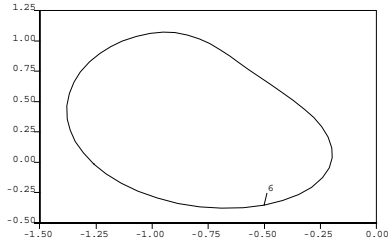
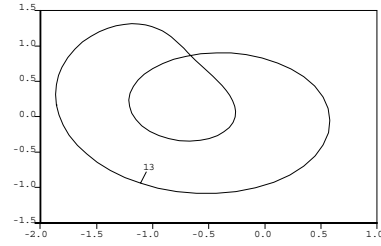


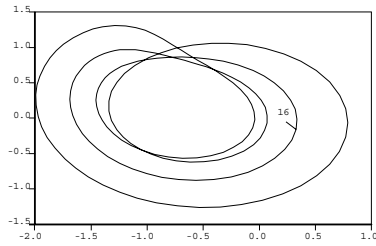
Abbildung 5: Bifurkationsdiagramm des Spektralsystems für $k_1 \in [0.025, 0.20]$, es treten Hopf-Bifurkation bei $k_1 \approx 0.1315$ und 0.1281 (Label 2 und 3) auf. Der Zweig ab Label 3 für $k_1 \approx 0.1281$ wurde weiter verfolgt. Es tritt eine Kaskade von Periodenverdopplungen (Label 7, 13, 15) und eine ganze Reihe weiterer Bifurkationen auf.



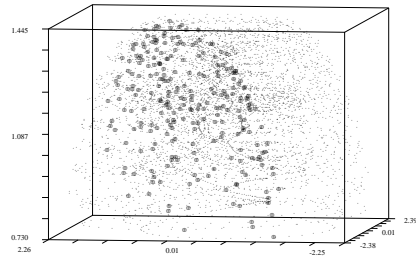
$k_1 = 0.09$



$k_1 = 0.06$



$k_1 = 0.05$



$k_1 = 0.043$

Abbildung 6: Einige periodische Orbits des Spektralsystems, es tritt offenbar eine Sequenz von Periodenverdopplungen auf. Für $k_1 = 0.043$ ist ein Phasenportrait zusammen mit dem Poincaré-Schnitt (fette Punkte) dargestellt.

Label-Nr.	Spektralsystem	Originalsystem
1 3	stabile Ruhelage Hopf-Bifurkation	stabile per. Lösung Torus-Bifurkation
6 7	stabile per. Lösung Periodenverdopplung	stabiler inv. Torus Torus-Doppelung
12 13	instabile 2-per. Lösung Periodenverdopplung	stabiler inv. Doppel-Torus Torus-Doppelung
16 15	instabile 4-per. Lösung Periodenverdopplung	stabiler inv. Vierfach-Torus Torus-Doppelung
—	seltsamer Attraktor	seltsamer Attraktor

Tabelle 2: Interpretation des Bifurkationsdiagramms in Abb. 5 für das Spektralsystem erster Ordnung.

Literatur

- [1] BERNET, K.: Ein Beitrag zur numerischen Approximation und Verfolgung von Toruslösungen parameterabhängiger dynamischer Systeme. Diss., TU Ilmenau, Shaker Verlag 1996.
- [2] BERNET, K.; VOGT, W.: Anwendung finiter Differenzenverfahren zur direkten Bestimmung invarianter Tori. ZAMM 74 (1994), No. 6, T577-T579.
- [3] BIBIKOV, YU. N.: Multi-Frequency Nonlinear Oscillations and their Bifurcations (russ.). Verlag der Leningrader Univ., Leningrad 1991.
- [4] BROER, H.W.; HUITEMA, G.B.; SEVRYUK, M.B.: Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems. Springer-Verlag, Berlin 1996.
- [5] BROER, H.W.; HUITEMA, G.B.; TAKENS, F.; BRAAKSMA, B.: Unfoldings and Bifurcations of Quasi-periodic Tori. American Math. Soc., Vol. 83, No. 421, Providence 1990.
- [6] CHEN, Y.; LEUNG, A.: Bifurcation and Chaos in Engineering. Springer-Verlag London 1998.
- [7] DIECI, L.; LORENZ, J.; RUSSELL, R.D.: Numerical Calculation of Invariant Tori. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 12 (1991), 607–647.
- [8] DIECI, L.; LORENZ, J.: Block M-Matrices and Computation of Invariant Tori. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 13 (1992), 885–903.
- [9] DIECI, L.; BADER, G.: On Approximating Invariant Tori : Block Iterations and Multigrid Methods for the Associated Systems. Preprint Nr. 658, Universität Heidelberg, 1992.
- [10] DOEDEL, E.J.; CHAMPNEYS, A.R.; FAIRGRIEVE, TH.F.; KUZNETSOV Y.A.; SANDSTEDE, B.; WANG, X.: AUTO 97: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with HomCont), 1997

- [11] HALE, J.K.: Oscillations in Nonlinear Systems. Dover Publications, New York 1963.
- [12] KAAS-PETERSEN, CHR.: Computation, Continuation, and Bifurcation of Torus Solutions for Dissipative Maps and Ordinary Differential Equations, In: Physica 25D (1987) 288-306, Elsevier Science Publishers B.V.
- [13] KEVREKIDIS, I.G., ARIS, R., SCHMIDT, L.D., PELIKAN, S.: Numerical Computations of Invariant Circles of Maps. Physica 16 D (1985), 243-251.
- [14] MINGYOU, H.; KÜPPER, T.; MASBAUM, N.: Computation of Invariant Tori by the Fourier Methods. SIAM J. Sci. Comput. 18 (1997), 918-942.
- [15] MOORE, G.: Computation and Parametrisation of Invariant Curves and Tori. SIAM J. Numer. Anal., 33 (1996), 2333-2358.
- [16] NEDWAL, F. Eine direkte Methode zur numerischen Approximation geschlossener Invarianzkurven von Poincaré-Abbildungen, Diplomarbeit TU-Ilmenau (15. 9. 1995).
- [17] SAMOILENKO, A.M.: Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht u.a. 1991.
- [18] SANDERS, J.A.; VERHULST, F.: Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. Springer Verlag, 1985.
- [19] SCHILDER, F.: Ein portables C++ Programm zur numerischen Integration von Anfangswertproblemen, Preprint No. M 1/97, TU Ilmenau
- [20] SCILAB GROUP: Introduction to Scilab, <http://www-rocq.inria.fr/scilab>
- [21] VAN VELDHUIZEN, M.: A new algorithm for the numerical approximation of an invariant curve. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 8 (1987), 951-962.
- [22] VAN VELDHUIZEN, M.: Convergence Results for invariant curve algorithms. Math. Comp. 51 (1988), No. 184, 677-697.
- [23] VOGT, W.; BERNET, K.: A Shooting Method for Invariant Tori. Preprint No. M 3/95, Technical University of Ilmenau, Department of Mathematics.
- [24] YOSHINGA, T. AND KAWAKAMI, H.: Bifurcations and Chaotic States in Forced Oscillatory Circuits containing Saturable Inductors. In: CARROLL, T.; PECORA, L. Nonlinear Dynamics In Circuits. World Scientific Publishing, 1995.